

Soluzione di problemi: itinerari cognitivi e metacognitivi per la prevenzione delle difficoltà matematiche

ITALA RICCARDI RIPAMONTI

Logopedista, Centro Ripamonti,
Cusano Milanino (MI)

SOMMARIO

Le difficoltà nella soluzione dei problemi, così frequenti tra i bambini della scuola elementare, possono essere affrontate recuperando le competenze prerequisite attraverso proposte didattiche opportunamente organizzate. In questo articolo vengono individuate tali competenze e viene presentato un itinerario, sostanzialmente metacognitivo, nel quale i singoli ambiti (linguistico, logico e numerico, di organizzazione spazio-temporale e prassica) sono integrati nelle attività specifiche dirette favorire nei bambini l'acquisizione di competenza e consapevolezza.

La Scuola Elementare segnala un sempre maggior numero di alunni che evidenziano difficoltà di apprendimento nell'ambito della matematica. Ciò rende necessario, tra l'altro, aumentare le competenze degli insegnanti in modo che siano in grado sia di prevenire questi problemi, con modalità di insegnamento adeguate, sia di riconoscerli al loro primo manifestarsi, così da poter fare segnalazioni precise e tempestive.¹

Le difficoltà possono essere numeriche, di calcolo, di ragionamento aritmetico e nella soluzione dei problemi. Si può trattare di cadute selettive oppure di deficit che coinvolgono alcune o tutte le aree suddette, come ci si può trovare di fronte a difficoltà generalizzate di apprendimento. Non di rado i soggetti dislessici sono anche discalcolici.

Gli studi psicopedagogici, nell'ambito dell'apprendimento logico-matematico, sono relativamente recenti e si sono occupati principalmente dei problemi legati al numero, al calcolo e al ragionamento aritmetico; solo negli ultimi anni è stato approfondito l'aspetto del problem solving.² Sono state individuate diverse cause responsabili delle difficoltà:

- inadeguate modalità di insegnamento (modello psicopedagogico);
- aree centrali specifiche danneggiate (modello neuropsicologico);
- deficit specifici: percettivi, mnestici, attentivi, strategici (modello cognitivo);
- carente sviluppo delle competenze metacognitive (consapevolezza e controllo).

Un notevole contributo a questi studi è stato portato dall'Università di Padova, che ha anche approfondito le problematiche legate alla soluzione dei problemi sottolineando l'importanza di adeguate competenze metacognitive di controllo. In particolare, Lucan-geli, Tressoldi e Cendron mettono in evidenza come tali processi consistono essenzialmente in *previsione, pianificazione, monitoraggio e valutazione* e come la soluzione del problema passi attraverso diverse fasi: la *comprensione*, la *rappresentazione*, la *categorizzazione*, il *piano di soluzione*, lo *svolgimento* e la *valutazione* (quest'ultima si effettua sia durante lo svolgimento che a conclusione dello stesso). Sulla base di questo modello teorico essi hanno messo a punto il test *SPM/ Test delle abilità di soluzione dei problemi matematici*³ per evidenziare, individuare e quantificare le possibili difficoltà in questo ambito, in modo da poter intervenire efficacemente.

In questo articolo non si intende affrontare la questione dell'individuazione dei soggetti con problemi in ambito matematico, ma piuttosto si cerca di fornire, a insegnanti e terapeuti, strumenti per prevenire e trattare queste difficoltà. L'obiettivo è quello di minimizzare le influenze negative delle «difficoltà di insegnamento» e indicare proposte e modalità di lavoro idonee a incoraggiare le competenze percettive, cognitive e metacognitive nei bambini. Infatti, se la psicologia dello sviluppo e dell'educazione si occupa, in ambito accademico, delle modalità di insegnamento-apprendimento,⁴ è necessario collegare la riflessione teorica, che genera nuove teorie e nuove modalità, alla prassi educativa proponendo possibili percorsi educativi.

La lunga esperienza nell'ambito della riabilitazione, sostenuta e guidata dal continuo interesse per gli studi psicopedagogici, ci ha permesso di individuare un possibile percorso educativo, inserito in un contesto di attività ampio, coerente e coeso che fornisce a terapeuti e insegnanti spunti di lavoro e di riflessione. Le proposte devono partire dalla scuola materna in quanto, già dai primissimi anni, il bambino va assecondato e incoraggiato a compiere determinate operazioni concrete e mentali, a riflettere su di esse prendendone, nella misura in cui gli è possibile, consapevolezza.

Prima di passare a illustrare le varie attività, occorre premettere che esse vanno inserite in un contesto di insegnamento-apprendimento di tipo costruttivista e collaborativo, il che significa che dovranno prevalere modalità di lavoro che garantiscono l'interazione con e tra i bambini e la possibilità di sperimentare, provare, dialogare e discutere. L'insegnante o il terapeuta dovranno saper cogliere gli spunti, utilizzare gli errori, comprendere lo stile cognitivo del bambino o dei bambini con cui si troveranno a lavorare, mettendosi al loro fianco quali «esperti» per aiutarli a raggiungere determinate competenze, fornendo loro guida e sostegno.

I percorsi, così come sono presentati, sono necessariamente schematici e rigidi, ma dovranno essere adattati alle esigenze dei bambini e allo specifico contesto in cui verranno proposti. Saper rinunciare alla rassicurazione che viene dai percorsi controllati e prestabiliti vuol dire aprire la strada ad apprendimenti flessibili e organizzati.

Dal momento che il compito di soluzione dei problemi investe molte competenze e abilità — alcune generali, alcune specifiche — e che più il bambino è piccolo e più vanno coltivate competenze di base (da applicare a diversi contesti per favorire la generalizzazione) per poi arrivare a competenze più specializzate, abbiamo individuato le componenti, strettamente correlate tra loro, che influiscono sulla capacità di risolvere i problemi:

- *spazio-temporali e prassiche*: i concetti topologici ed euclidei, la direzionalità, la sequenzialità, i rapporti funzionali e strutturali, l'ordinazione, la schematizzazione;
- *linguistiche*: comprensione della verbalità, del testo scritto, della terminologia specifica logico-matematica;
- *logiche*: capacità logica generale, concetti logici relativi alle quattro operazioni;
- *numeriche*: sistema dei numeri (comprensione e produzione) e sistema del calcolo (elaborazione dei segni, magazzino dei fatti numerici, procedure di calcolo);
- *prenumeriche*: enumerazione, ordinazione, associazione, ecc.

Le prime due possono essere considerate componenti primitive, prerequisite, mentre la terza, quella logica, è la componente specifica; la componente numerica è secondaria in quanto è possibile individuare la corretta soluzione di un problema anche se non si hanno abilità numeriche eccellenti; inoltre, esistono problemi non numerici.

Sorvoliamo, qui, su tutte quelle attività e proposte classiche⁵ (prevalentemente di tipo psicomotorio),⁶ che per altro sono particolarmente preziose — soprattutto a livello di scuola materna — in quanto permettono al bambino di partire dalla consapevolezza del sé corporeo per costruire le categorie di spazio, tempo e causalità e di organizzarsi negli ambiti spazio-temporale e prassico (associazioni, ordinazioni, percorsi, costruzioni, trasformazioni, distribuzioni, inclusioni, ecc.).

Competenze linguistiche, di organizzazione spazio-temporale, prassica e di attivazione del pensiero logico

È importante che le attività proposte di seguito per l'acquisizione e lo sviluppo di queste abilità siano presentate ai bambini con modalità che permettano loro sempre di manipolare concretamente oggetti e situazioni per passare, in un secondo momento, a rappresentazioni grafiche e verbali. Questo passaggio graduale dal concreto all'astratto,

al rappresentato, al simbolico deve essere una costante nei percorsi educativi.⁷ Nello specifico sfocerà, ogni volta che ciò sia possibile, in rappresentazioni schematiche. Lo schema incoraggia i bambini, guidati dall'adulto, all'uso delle strategie.

Sequenzialità e direzionalità: prima/dopo, causa/effetto

Per lavorare su queste competenze sono particolarmente indicate le sequenze di immagini (storielle illustrate),⁸ da proporre utilizzando una *mascherina* in cartoncino (si veda la figura 1). La mascherina, sulla quale sono riportate le immagini che compongono la sequenza, collocate secondo l'ordine temporale e causale degli avvenimenti, è costruita in modo da poter coprire, di volta in volta, una o più illustrazioni; essa può contenere due, tre o più immagini, secondo il numero di vignette che costituiscono la storiella su cui si lavora.

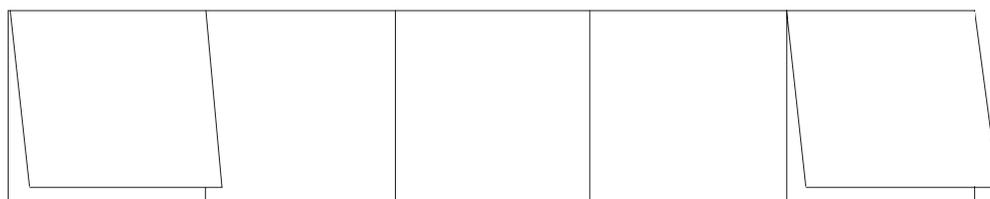


Fig. 1 Mascherina in cartoncino.

La mascherina sarà la traccia concreta su cui si farà operare il bambino e che favorirà l'elaborazione dello schema mentale.

Si comincia con due illustrazioni: ad esempio, «La bambina mette le calze» e «La bambina mette le scarpe», inserite in due caselle contigue, per evidenziare *adesso, prima, dopo*. Si descrivono le situazioni illustrate: «Vedi: la bambina qui mette le calze e qui mette le scarpe». Successivamente, utilizzando la possibilità di nascondere a turno un'illustrazione, si domanda al bambino: «Cosa fa adesso la bambina?», «E dopo? Ti ricordi cosa fa dopo?». Si ripete la procedura fino a che il bambino ha colto la corretta successione degli avvenimenti; dopodiché, si procede nel senso inverso (sempre adoperando la mascherina per nascondere un'illustrazione): «Cosa fa adesso la bambina?», «Ti ricordi cosa ha fatto prima?». In questo modo il bambino prende coscienza che esistono un adesso e un prima, un adesso e un dopo, e che questi sono termini relativi. L'adesso sarà sempre identificato con il momento (la vignetta) da cui parte l'attenzione.

Subito dopo si faranno proposte su causa ed effetto; ad esempio: «La bambina cade» e «La bambina piange», procedendo come descritto sopra. Naturalmente, le considerazioni saranno diverse: «Vedi, la bambina cade; cosa pensi che farà dopo?», «Vedi la bambina piange, perché? Cosa è successo prima?», «La bambina cade e allora piange», «La bambina piange perché è caduta».

Successivamente, si propongono sequenze simili alle precedenti ma con tre elementi (ad esempio, il gatto guarda il topo, il gatto prende il topo, il gatto mangia il topo); si può nascondere la vignetta centrale chiedendo ai bambini di ricordare (o di dedurre) cosa illustra, osservando la vignetta precedente e quella seguente. Viceversa, si possono coprire la prima e l'ultima illustrazione lasciando in vista quella centrale. Via via si aumenta il numero delle vignette, sino ad arrivare a 4-6.

In un contesto collaborativo-cooperativo, in cui l'insegnante e il terapeuta fanno da guida, sostegno e mediazione, si richiederà ai bambini:

- di rispondere alle domande, e di formularle a loro volta;
- di raccontare le storielle (l'adulto, se necessario, farà «prestito di competenze»).

L'utilizzo della mascherina favorisce modalità flessibili di ricostruire la storiella, in quanto l'insegnante può di volta in volta invitare gli alunni a ricostruire la storia partendo da momenti diversi (una qualsiasi delle illustrazioni), il che comporta ricostruzioni sempre differenti, oppure spostare l'attenzione del bambino procedendo avanti e indietro (dalla prima all'ultima illustrazione e viceversa), una competenza, questa di andare a ritroso, che è spesso richiesta nella soluzione dei problemi.

Queste attività incoraggiano creatività e flessibilità nel modo di vedere, percepire, ricostruire avvenimenti e situazioni e di affrontare i problemi attraverso approcci da diverse prospettive, quindi una migliore organizzazione del pensiero e un uso disinvolto della verbalità. Inoltre, si favorisce la consapevolezza nell'uso dei connettivi e degli avverbi: «La bambina corre e cade e piange», «La bambina corre, dopo cade e piange», «La bimba piange perché prima è caduta», «La bambina piange, infatti è caduta perché correva», «La bimba cade e piange perché prima correva»; dipende da come si guida l'attenzione del bambino utilizzando mascherina e domande.

Trasformazione

L'operazione di trasformazione — di un oggetto o di una situazione — è fondamentale nell'ambito della logico-matematica: le operazioni matematiche non sono altro che trasformazioni. Si tratta di rendere i bambini consapevoli che, data una situazione, agendo su di essa con determinate operazioni, essa cambia. Vale a dire: un certo stato può trasformarsi in un altro tramite un'azione.

Spesso i bambini non distinguono (almeno non consapevolmente) lo stato dall'azione. Infatti, se si chiede loro di dire il contrario di *lavare* possono dire *sporco* o, come contrario di *seduto*, *alzati*. È quindi utile proporre esperienze significative in questo senso. Le sequenze illustrate presentate nel sussidio riabilitativo-didattico *E dopo ancora...*⁹ sono state concepite proprio con questo scopo e vanno usate con una mascherina a tre posti (si veda la figura 2).

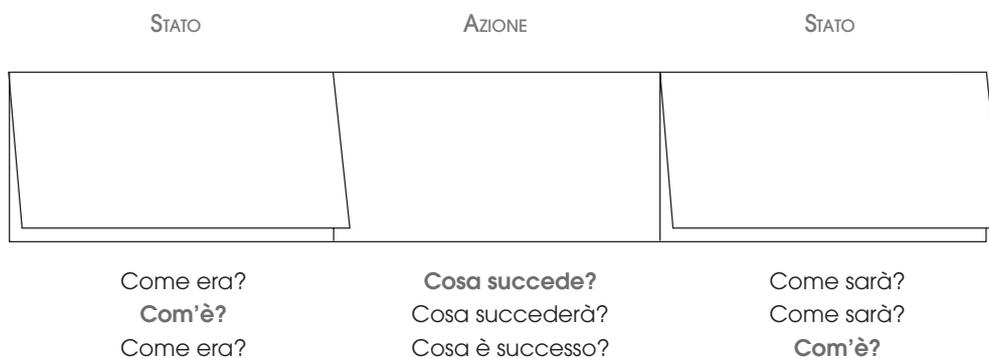


Fig. 2 Mascherina a tre posti.

Insieme ai bambini si inseriscono tre illustrazioni nella mascherina, descrivendole e commentandole. Ad esempio:

«La maglietta è sporca, la mamma la lava, la maglietta è pulita». (Oppure: «La maglietta è pulita, il bimbo la sporca, la maglietta è sporca»).

Quindi si procede come sopra descritto scoprendo una alla volta le illustrazioni e facendo coincidere il presente (adesso) con la vignetta in vista:

«Cosa succede (adesso)?»

«La mamma lava la maglietta»

«Come'era prima la maglietta?»

«Sporca»

«Come sarà dopo?»

«Pulita».

Oppure:

«Com'è (adesso) la maglietta?»

«Sporca»

«Cosa succederà?»

«La mamma la laverà e poi sarà pulita».

O ancora:

«Com'è la maglietta?»

«Pulita»

«Prima come era?»

«Sporca»

«Cosa è successo?»

«La mamma l'ha lavata».

È utile anche proporre storielle in cui ci sono sequenze di avvenimenti che rimandano da un elemento all'altro, tipo la favoletta di Petruzzo.

La mamma chiede a Petruzzo di andare nell'orto a prendere un cavolo, ma Petruzzo risponde di no. Allora la mamma dice al bastone di battere Petruzzo che non vuole andare a prendere il cavolo e il bastone risponde di no. La mamma dice al fuoco di bruciare il bastone, poi all'acqua di spegnere il fuoco, poi al bue di bere l'acqua, alla corda di legare il bue, al topo di rosicchiare la corda, al gatto di mangiare il topo, e tutti si rifiutano fino a che il gatto dice di sì. Allora il topo corre a rosicchiare la corda, la corda a legare il bue, il bue a bere l'acqua, l'acqua a spegnere il fuoco, il fuoco a bruciare il bastone e il bastone a battere Petruzzo che corre nell'orto a prendere il cavolo.

Sia il contare all'indietro che la soluzione di problemi con più operazioni richiedono la capacità di andare a ritroso con la mente attraverso passaggi concatenati tra loro.

Un'altra attività è quella di proporre storielle nelle quali vengono presentate situazioni che si svolgono parallele per un certo tempo e poi confluiscono, oppure nelle quali, al contrario, la situazione iniziale si sviluppa in due vicende parallele. Ad esempio:

Il gatto gioca con un gomitolo di lana; poi si addormenta sul divano del salotto. Giacomo nella sua stanza fa i compiti, guarda la TV, poi gioca con le biglie. Una biglia rotola fuori dalla stanza e Giacomo giocando la fa arrivare in salotto. Il gatto si sveglia e si mette a giocare con Giacomo.

Viceversa:

La mamma e Lucia stanno preparando, insieme, una torta, poi la mamma va in salotto e si siede a cucire mentre Lucia va nella sua cameretta a guardare la TV.

In forma più complessa, le storie possono anche prevedere più personaggi e situazioni; ad esempio:

Diversi bambini — con sequenze di avvenimenti diverse, da luoghi, in modi e in momenti diversi — raggiungono i giardinetti, giocano insieme per un certo tempo e poi, in momenti anche diversi, si allontanano verso luoghi e attività differenti.

Gli esempi qui forniti riguardano storielle molto brevi; comunque, quello che importa è far prendere consapevolezza ai bambini di questo scorrere particolare degli avvenimenti, utilizzando «mascherine» particolari (che potranno essere di carta, ritagliate dai bambini stessi) o più semplicemente disponendo le vignette sul tavolo (disposizione che potrà poi essere trasformata in uno schema; si veda la figura 3). Ciò li aiuterà a rappresentarsi gli avvenimenti, collegandoli tra loro, su diversi piani.

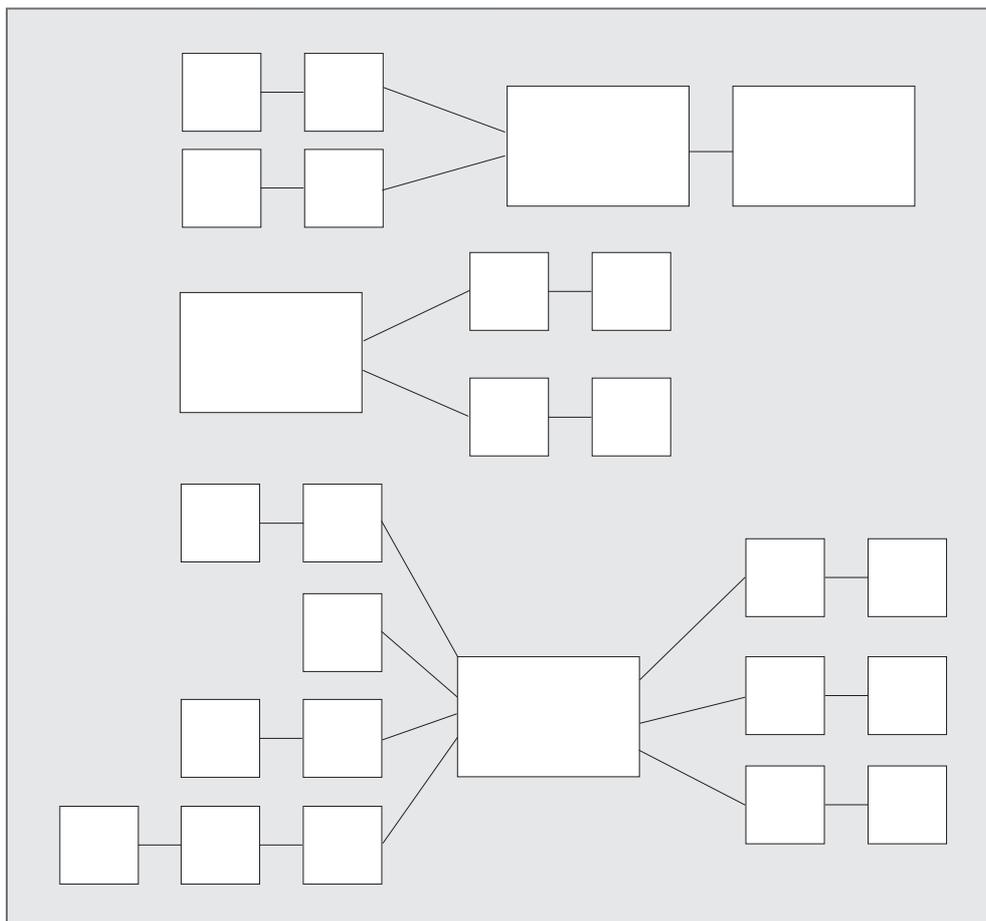


Fig. 3 Schema per storielle che procedono parallele per poi convergere, o viceversa.

Anche in questo caso è utile far lavorare i bambini:

- partendo dal momento iniziale procedendo verso quello conclusivo;
- partendo da una vignetta qualsiasi e quindi recuperando via via le altre vignette (precedenti e seguenti);
- andando a ritroso;
- nascondendo, di volta in volta, una o più illustrazioni e incoraggiando i bambini a ricordare, collegare, immaginare, dedurre.

Così, ad esempio, nella storiella «Luca oggi in classe è molto distratto e prenderà un brutto voto in dettato», per capire perché succede questo occorre andare a ritroso e scoprire che Luca prima di uscire di casa ha sentito la mamma che parlava al telefono e

diceva che la nonna sta molto male. Questo modo di pensare è lo stesso che viene richiesto ai ragazzi quando, nel problema, ci sono delle domande sottintese, dei dati da ricavare.

Sequenzialità di tipo funzionale e/o costruttivo

Si propongono sequenze di avvenimenti obbligate ma su base non causale bensì funzionale o costruttiva, i cosiddetti diagrammi di flusso: le fasi per cucinare un uovo al tegamino, per preparare il caffè, per costruire una casetta, per incollare le figurine sull'album, per fare la doccia, per preparare una torta, per montare una macchinina, per eseguire mansioni domestiche, per svolgere un compito; ad esempio, prima svuoto il cassetto, poi lo pulisco, poi inserisco i divisori, poi metto a posto le posate, ecc.

Si preparano le sequenze illustrate, ma si fa anche eseguire concretamente la concatenazione delle azioni. Un notevole aiuto, per visualizzare e organizzare la sequenza senza mai «perdersi per strada», viene dall'evidenziare le varie fasi utilizzando le parentesi. Naturalmente occorre insegnare ai bambini (e far fare loro esperienza) che le prime operazioni da compiere sono quelle che si trovano nella parentesi tonda, procedendo sempre da sinistra verso destra, poi quelle in parentesi quadra e così via.

Con i soggetti più giovani, o con maggiori difficoltà, si possono utilizzare le immagini (inserite nella sequenza tra parentesi) anziché le scritte.

Le fasi di soluzione di un problema sono simili e vedremo come la pianificazione e il monitoraggio nella soluzione di un problema con più operazioni siano facilitate se si esprime la sequenza risolutoria attraverso un'espressione matematica.

Per le attività per lo sviluppo delle abilità numeriche e l'acquisizione della specifica terminologia matematica si rimanda il lettore a una trattazione specifica.¹⁰

Concetto di problema e operazioni logiche

Per dare al bambino un concetto allargato di problema, e per incoraggiare il ragionamento logico e l'utilizzo di strategie, si propongono:

- situazioni problematiche non matematiche (ad esempio: «Luca ha lo zaino pieno di libri, Marco ha la cartella piena di foglie secche. Chi ha la cartella più pesante?»);
- situazioni problematiche matematiche ma senza numeri (ad esempio: «Fabio regala un sacchetto di caramelle alla sua amica Erika. Erika, a sua volta, ne regala una parte alla sua amica Lucia. Chi ha regalato più caramelle?»);
- situazioni problematiche matematiche ma in cui non sia richiesta l'operazione matematica (ad esempio: «Anna e Stefano stanno leggendo lo stesso racconto. Ad Anna mancano 2 righe a Stefano 10 righe. Chi finirà prima di leggere il racconto?»).

Riteniamo fondamentale presentare questi piccoli problemi come «storielle» su cui discutere e ragionare insieme. I bambini amano la dimensione narrativa, con cui hanno dimestichezza; spontaneamente fanno le loro considerazioni e riflessioni. Si cimentano volentieri, in questi contesti, nella ricerca di soluzioni, mentre possono «bloccarsi» di fronte a qualcosa definito come problema. Solo quando saranno rassicurati sulla loro capacità si potrà utilizzare il termine *problema*, mostrando loro che sono già capaci di fare cose «difficili».

Concetti logici relativi alle quattro operazioni

Il punto fondamentale è il ragionamento logico-matematico: avere interiorizzato i concetti relativi alle quattro operazioni significa saper affrontare la soluzione dei problemi matematici.

Per consentire al bambino di raggiungere questo traguardo bisogna prima far eseguire attività concrete, che corrispondano alle attività mentali che si vogliono sollecitare, quindi è necessario rendere visibili (con immagini o schemi) le attività mentali stesse (il ragionamento).

È importante fare rappresentare graficamente ai bambini le varie attività per arrivare alla rappresentazione grafica schematica; inizialmente lo schema dovrà essere molto concreto e sarà una rappresentazione grafica delle attività concrete proposte ai bambini, proprio per facilitare e guidare l'evoluzione delle capacità infantili. Sarà poi il bambino stesso (opportunamente incoraggiato dall'adulto), una volta che avrà generalizzato, ad arrivare a schemi più simbolizzati. Fatto questo si può proporre di categorizzare secondo lo schema:

- somma (mettere insieme);
- sottrazione (confrontare e togliere la parte uguale);
- moltiplicazione (mettere insieme, ripetutamente, una stessa quantità e poi contare il tutto);
- divisione (distribuire e poi contare «ogni», oppure togliere ripetutamente una quantità uguale da un insieme e poi contare «ogni»).

Naturalmente le proposte (presentate più avanti) vanno graduate nel tempo: inizialmente potranno essere illustrate, anche per i soggetti più grandi con difficoltà di comprensione del linguaggio. Quando i bambini mostrano di aver fatto propri i concetti che sottostanno alle operazioni matematiche si potranno cimentare con situazioni problematiche con i numeri in cui si richieda l'operazione matematica. Dunque, si lavora prima su problemi per immagini¹¹ e poi su problemi scritti. Anche in questo caso è importante portare il bambino allo schema risolutivo (pianificazione del problema) e alla categorizzazione.

A questo scopo è necessario un lavoro preliminare nell'ambito linguistico sulla terminologia e, nell'ambito della logica, sui concetti che sottendono le varie operazioni. Entriamo quindi nello specifico.

Concetto e operazione di somma

Prima si lavora lungamente sulla terminologia — *aggiungi, metti insieme, ecc.* — facendo agire il bambino con materiale concreto, per poi passare a forme più astratte di «mettere insieme»: mettere insieme con la mente, con l'attenzione che riunisce in un unico rappresentato cose concretamente anche lontane o separate. Successivamente ci si sofferma sul significato di *mettere insieme* e sulla sua rappresentazione grafica, evidenziando come in matematica *mettere insieme* implica contare gli elementi dati prima e dopo averli messi insieme. Contare significa rispondere alla domanda: «Quanti?».

Si lavorerà con i bambini:

1. proponendo problemi adeguati rispetto allo schema presentato nella figura 4 per favorire la capacità di categorizzarli. Alcuni esempi: «La mamma compra 2 pizze e il papà ne compra altre 3; quante pizze, in tutto, porteranno a casa?», «Marco sabato ha letto 2 pagine del suo libro, domenica ne ha lette altre 4; quante pagine in tutto ha letto Marco?». Naturalmente, bisognerà far constatare ai bambini che, anche cambiando le quantità, lo schema (in questo caso rappresentato a un livello più astratto) non cambia: «Luigi ha 4 figurine dei Pokémon, la sua amica gliene regala ancora 5. Quante figurine ha adesso Luigi?», «Sul banco ci sono la cartella di Giulio e quella di Lucia. Nella cartella di Lucia c'è un libro, in quella di Giulio ce ne sono 4. Quanti libri ci sono in tutto sul banco?». In un secondo momento si farà scegliere ai bambini tra diversi testi

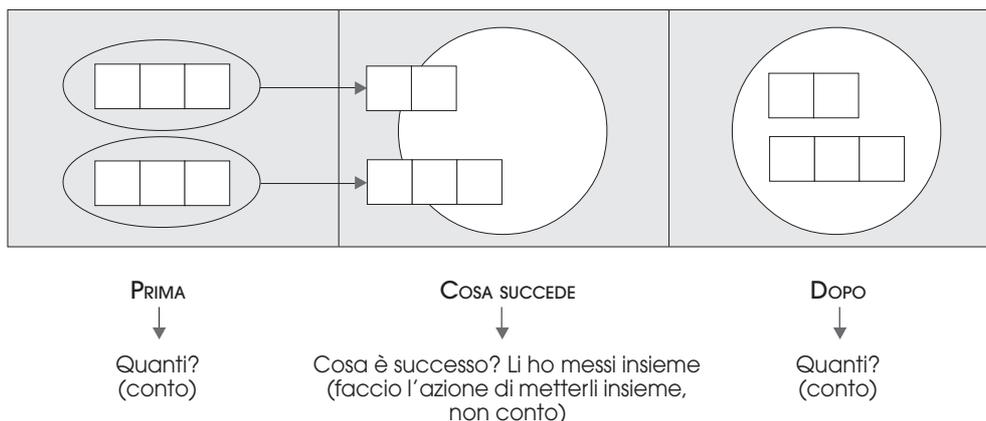


Fig. 4 Rappresentazione grafica della somma.

di problema quello o quelli che si adattano allo schema (quindi che sono della stessa categoria);

2. facendo domande di previsione sulla quantità che risulterà dopo aver messo insieme. Vale a dire: «Pensi che dopo saranno di più, di meno o uguali? Quanti pensi che saranno?». Questo permetterà di valutare se il bambino ha un buon concetto di quantità (e di conservazione e modificazione della medesima); in caso contrario è inutile lavorare sui problemi. Se le difficoltà riguardano unicamente la corrispondenza numero-quantità si potrà continuare a lavorare sul concetto ma senza i numeri, programmando contemporaneamente delle attività per far giungere il bambino alla competenza nella numerazione. Se necessario si potrà partire da problemi senza numeri e/o da situazioni problematiche solo illustrate.

In generale, per risolvere un problema bisogna porsi un obiettivo ben definito («Qual è l'informazione che devo scoprire?»), quindi limitarsi a rispondere alle domande riguardanti quest'obiettivo. Nel problema matematico queste domande non riguardano mai il *chi*, il *dove*, il *perché* e il *cosa*, ma invece «Com'era prima? Cosa è successo? Com'è adesso?», oppure «Cosa succede? Com'era prima? Come sarà dopo?». Il *come* si riferisce esclusivamente alla quantità: di più, di meno, uguale; quindi ci si pone la domanda: quanti?

Nel proporre le quattro operazioni bisogna considerare che la somma può essere facilmente collegata con la moltiplicazione in quanto si tratta sempre di mettere insieme e poi contare (anche se nel caso specifico quelle che si mettono insieme sono un certo numero di quantità uguali). Potrebbe essere opportuno, prima di proporre la sottrazione (che presenta come vedremo notevoli difficoltà), cominciare a proporre attività specifiche per la moltiplicazione.

Concetto e operazione di moltiplicazione

Si seguono i vari passaggi come per la somma. Nello specifico bisogna introdurre il concetto di unità collettiva e quindi quello che sottostà all'operazione di moltiplicazione: mettere insieme un certo numero di quantità uguali. Anche in questo caso si arriverà alla rappresentazione grafica.

Per favorire l'acquisizione del concetto di unità collettiva, si lavorerà con materiale concreto; ad esempio, usando i mattoncini del Duplo o del Lego, si porterà il bambino a constatare che un mattoncino è un'unità, ma anche una torre (formata da diversi mattoncini) è un'unità. Come sempre il modo migliore per favorire lo sviluppo di nuove competenze è quello di interagire con l'alunno in situazioni adeguate e mirate, con consegne specifiche; ad esempio: «Prendi tre mattoni; costruisci tre torri di due mattoni; costruisci quattro torri di due mattoni», ecc. Oppure, con i trenini: «Prendi quattro

vagoni; costruisci due trenini di tre vagoni», ecc. Sono questi esempi molto schematici: è evidente che le proposte dovranno essere sviluppate con modalità e in contesti motivanti per i bambini, invitandoli a interagire tra loro e allo scambio di ruoli.

Si proporranno molte esperienze di questo tipo, esperienze in cui l'attenzione si sposta alternativamente dal numero di unità che costituiscono un tutto (numero di mattoni per una torre), al numero di elementi che sono costituiti da diverse singole unità (numero di torri formate da un certo numero di mattoni). È un concetto molto difficile per il bambino e perciò richiede molte esperienze concrete ancora a livello di scuola elementare, ma è un concetto fondamentale per i «raggruppamenti» su diverse basi e quindi anche su base decimale.

Una volta acquisite queste competenze sarà possibile, lavorando con lo schema (si veda la figura 5), affrontare problemi senza numeri in cui ci sia da applicare il concetto di moltiplicazione e successivamente problemi con i numeri. Anche in questo caso è necessario passare prima attraverso i problemi solo illustrati e si costruisce con i bambini una rappresentazione grafica. Ci si comporta quindi, come per la somma, inserendo tanti problemi diversi nello schema.

Concetto e operazione di sottrazione

L'operazione di sottrazione è particolarmente difficoltosa in quanto implica due operazioni: una di confronto tra due quantità e una di evidenziazione della differenza tra esse. Ciò la rende molto più difficile della somma. In effetti presenta le stesse difficoltà dell'operazione linguistica di negazione: prima devo rappresentarmi una cosa e poi negarla. Ragionare sul negativo è sempre difficile, specie per i bambini più giovani.

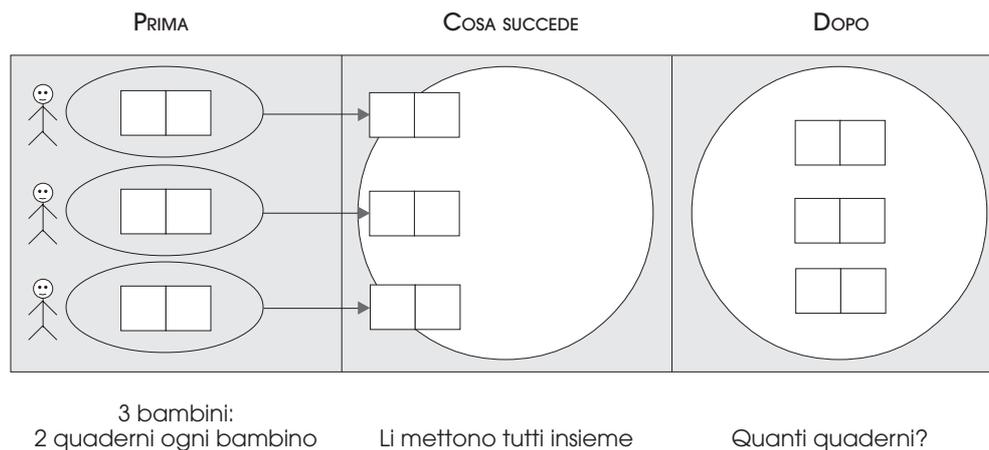


Fig. 5 Rappresentazione grafica della moltiplicazione.

Come visto in precedenza, è necessario lavorare lungamente sulla comprensione della terminologia e sul significato di togliere. Si inizia con il togliere concretamente — distruggere, cancellare, strappare, ecc. — facendo agire il bambino, per poi passare a forme meno concrete — dimenticare, mandare indietro, ecc. — quindi a predicati che non hanno il significato di *togliere* ma che lo acquistano attraverso l'operare della mente (ad esempio, «Ho scritto 4 pagine del mio quaderno che ne ha 30, quante ne devo ancora scrivere?»), per arrivare infine a operare con la mente, con l'attenzione, che oscura, elimina, una parte del tutto considerato.

Parallelamente si conducono esperienze e riflessioni su: *uguale/diverso*, *abbastanza*, *manca*, *cresce*, *di più/di meno*, per poi proporre di far diventare uguali due quantità differenti togliendo la quantità in più o aggiungendo la quantità in meno. A questo punto si lavora sull'evidenziazione della quantità in più: si confrontano le due quantità e si elimina la quantità uguale (sovrapposizione). Come di consueto, si lavora inizialmente sulla rappresentazione grafica e successivamente si inseriscono i dati numerici (si vedano le figure 6 e 7).

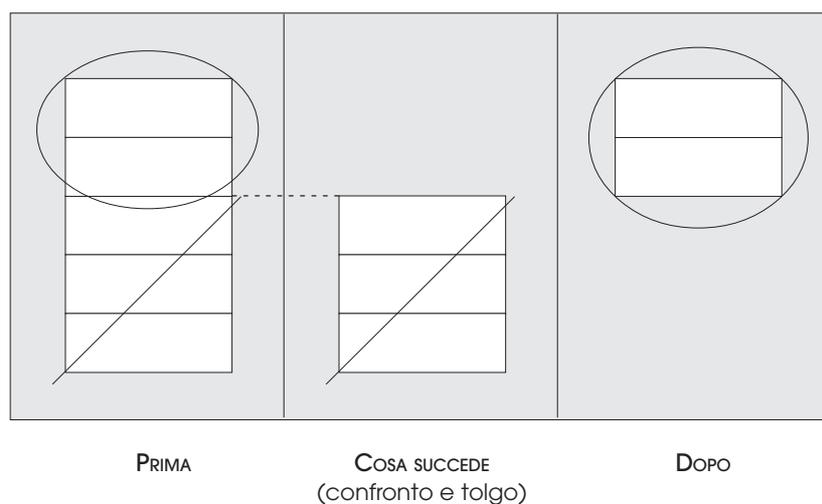


Fig. 6 Rappresentazione grafica della sottrazione senza dati numerici.

Guidato e incoraggiato a operare in questo modo, il bambino non farà fatica quando si troverà di fronte ai diversi tipi di sottrazione: quanto manca a ..., che differenza c'è tra ... e ..., quanto c'è tra ... e ..., quanto mi rimane dopo aver tolto ... da ...

Pensiamo a quando i bambini dicono, ad esempio, che per sapere quanto 10 sia più grande di 7, hanno aggiunto 3. In effetti, se imparassero a operare confrontando 10 e 7 per poi togliere la parte uguale non direbbero di avere fatto una somma: rispondono con un dato percettivo che non sarà più di aiuto quando si tratterà di numeri alti.

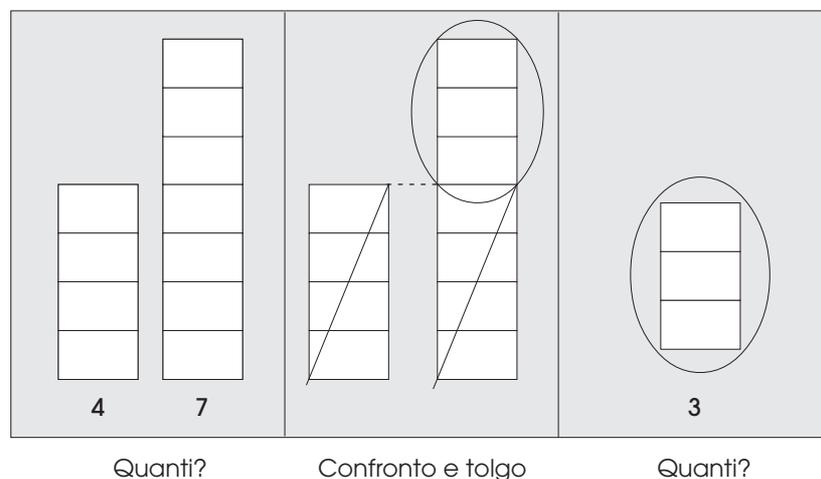
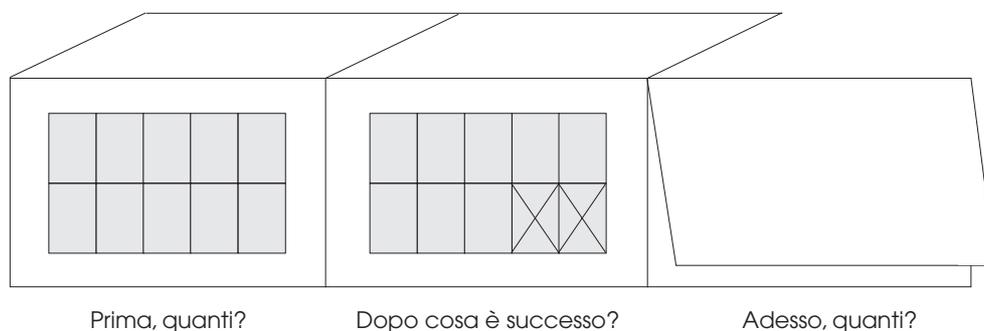


Fig. 7 Rappresentazione grafica della sottrazione con dati numerici.

La sottrazione presenta anche un'altra difficoltà: infatti, lavorando con la somma si hanno due o più quantità concrete su cui operare mettendole insieme: due mattoni, poi tre mattoni, ecc. Nella sottrazione si opera due volte sulla stessa quantità. Quindi si ha una quantità concreta (tre cioccolatini) e su questa quantità si opera (ne mangio 2). In altre parole, il primo numero corrisponde a una quantità percettiva, mentre il secondo è una quantità rappresentata (da qui la difficoltà di una rappresentazione grafica sufficientemente «trasparente»).

A questo punto si possono inserire i problemi matematici ma senza numeri; ad esempio, «Anna aveva *molti* biscotti, ne ha mangiati *alcuni*. Adesso Anna ne ha di più o di meno?». In questo caso, oltre all'operazione di confronto tra *molti* e *alcuni* (che ribadisce l'importanza di avere una buona competenza sulla terminologia matematica: *molti, tutti, alcuni, ogni, pochi, ecc.*), si richiede il confronto tra le quantità prima e dopo avere operato su di esse: «Se ha mangiato dei biscotti ne ha tolti o ne ha aggiunti? Decidi quale operazione va bene. Allora adesso ne ha di più, di meno o uguale a prima?». Dopodiché si ripropone il problema con i numeri: «Anna aveva 10 biscotti; ne ha mangiati 2. Quanti biscotti ha adesso Anna?» (si veda la figura 8).

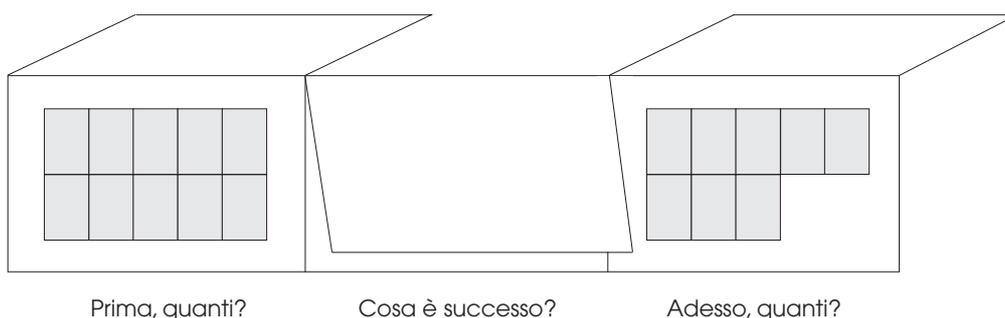
Si riprende la serie di domande e riflessioni, si arriva a decidere per la sottrazione e la si esegue. Poiché la riflessione porta a stabilire che Anna adesso ha meno biscotti di prima, se il risultato è un numero superiore a 10 l'insegnante incoraggia l'alunno a riflettere sull'attendibilità del risultato e a rifare l'operazione. Per aiutarlo a identificare l'errore può essere opportuno tornare indietro alla somma; ciò dimostra l'importanza di lavorare preliminarmente sulle sequenze di ogni tipo andando avanti e indietro.



Anna aveva 10 biscotti; ne ha mangiati 2. Quanti biscotti ha adesso Anna?

Fig. 8 Rappresentazione grafica della sottrazione in cui l'incognita è la differenza

È utile a questo punto soffermarsi su un problema rappresentato spostando di volta in volta l'incognita: «Anna ha 8 biscotti; prima ne aveva 10. Quanti biscotti ha mangiato Anna?» (si vedano le figure 9 e 10). In questo modo si torna alla somma e ci si può rendere conto che un'operazione è l'inverso dell'altra.



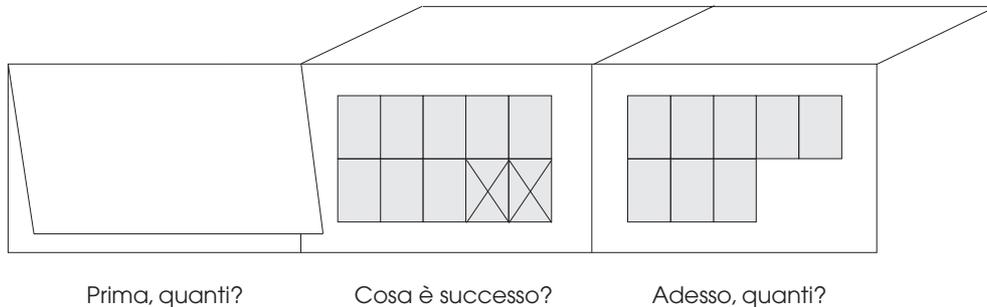
Anna ha 8 biscotti; prima ne aveva 10. Quanti biscotti ha mangiato Anna?

Fig. 9 Rappresentazione grafica della sottrazione in cui l'incognita è il sottraendo.

Concetto e operazione di divisione

La divisione è l'inverso della moltiplicazione, vale a dire:

- distribuisco una certa quantità (conosciuta) tra un certo numero (conosciuto) di postazioni e poi conto quanti elementi si trovano in ogni postazione (raggruppamento che si è formato), oppure
- raggruppo gli elementi di una certa quantità (conosciuta) secondo un valore (numero conosciuto) e poi conto il numero di raggruppamenti.



Anna ha mangiato 2 biscotti e adesso ne ha 8. Quanti biscotti aveva prima Anna?

Fig. 10 Rappresentazione grafica della sottrazione in cui l'incognita è il minuendo.

In effetti si tratta sempre della stessa operazione, ma si è spostata diversamente l'attenzione sulla base del dato non conosciuto. Anche in questo caso è necessario, di volta in volta, spostare la domanda su un argomento diverso, vale a dire: quanti bambini?, quante caramelle a ogni bambino?, quante caramelle in tutto?

La differenza tra moltiplicazione e divisione è espressa dalla sequenza delle operazioni da svolgere: nella moltiplicazione «Metti tot per tot volte; conta tutti insieme», nella divisione «Distribuisci una quantità conosciuta a tot persone (o in tot luoghi) e poi conta quanti elementi ha ogni persona o quanti se ne trovano in ogni luogo», oppure «Raggruppa una certa quantità conosciuta in un numero conosciuta di elementi e poi conta quanti gruppi si sono costituiti». Anche per la divisione si faranno tutte le proposte già illustrate per le precedenti operazioni (si veda la figura 11).

In generale è opportuno proporre ai bambini percorsi di soluzione del problema che partano di volta in volta da rappresentazioni diverse: ad esempio, leggo il testo scritto, lo illustro, lo traduco in schema e quindi in un'operazione matematica; oppure parto dallo schema e da questo risalgo al testo scritto e illustrato e all'operazione risolutiva, e così via.

Problemi con più operazioni

Non appena si passa ai problemi con più di un'operazione si inseriscono le espressioni: la pianificazione parentesizzata, con la quale i bambini avranno già preso confidenza programmando le varie attività concrete, tipo i diagrammi di flusso, le ricette, ecc. Ad esempio:

Per una festiciola in classe sono stati acquistati: 24 pasticcini, 12 crostatine, 4 scatole da 6 merendine ciascuna, e 4 confezioni da 3 brioches ognuna. Poiché alla festa parteciperanno 9 bambini e 3 maestre, quanti dolcetti avrà a disposizione ogni partecipante alla festa?

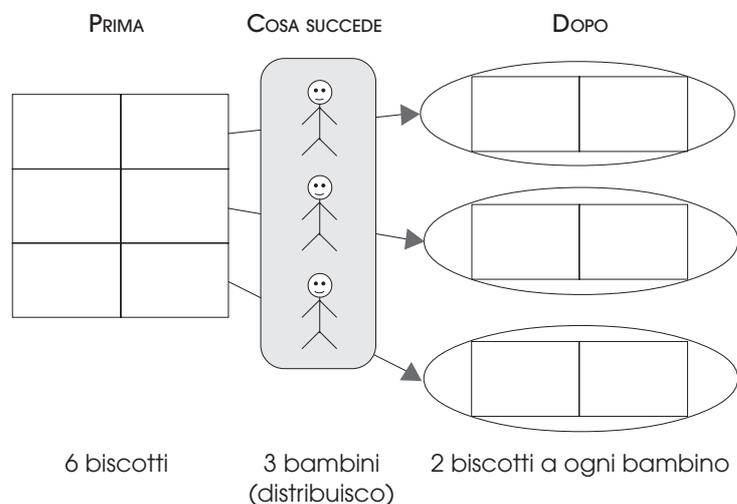


Fig. 11 Rappresentazione grafica della divisione.

Dopo essersi accertati della comprensione del testo e averlo rappresentato e categorizzato, si invitano i ragazzi a fare il piano di soluzione e a esprimerlo attraverso l'espressione:

$$[24 + 12 + (4 \times 6) + (4 \times 3)] : (9 + 3)$$

In questo modo, nello svolgimento del problema, non correranno il rischio di smarrire la sequenza delle operazioni da svolgere. Spesso infatti i bambini intuiscono la soluzione ma poi, impegnati nell'esecuzione delle operazioni, perdono il «filo» del ragionamento e la corretta concatenazione delle diverse fasi operative.

Conclusioni

Alla base di questo lavoro ci sono alcuni concetti fondamentali — oltre a quelli sottolineati in apertura relativi a modalità di insegnamento-apprendimento di tipo interattivo e collaborativo — che potremmo riassumere nei seguenti punti:

- l'abilità nella soluzione dei problemi deve essere considerata all'interno di un contesto allargato che include le competenze spazio-temporali, prassiche, linguistiche, logico-matematiche e numeriche. Queste competenze e abilità vanno stimolate e incoraggiate al loro primo manifestarsi nei comportamenti, nei giochi e negli interessi infantili, già dalla scuola materna (se non prima);

- i bambini devono essere incoraggiati a operare concretamente, a manipolare oggetti e situazioni, partendo da diversi punti di vista e in vista di obiettivi diversi, a organizzare il proprio pensiero percorrendo itinerari verso il futuro e verso il passato, seguendo lo spostarsi dell'attenzione. In questo modo, allenandosi a decentrare l'attenzione, essi arrivano ai concetti relativi di *prima*, *adesso*, *dopo* e di *causa/effetto*;
- i bambini devono essere aiutati a organizzare il proprio operare mentale, le proprie conoscenze e le informazioni in schemi — non rigidi ma ricostruibili in ogni momento da diverse angolature — per poter archiviare informazioni e conoscenze secondo criteri reticolari che facilitino il recupero delle stesse in ambiti diversi;
- è fondamentale che, prima di affrontare i problemi, e le tecniche procedurali delle operazioni, essi abbiano acquisito i concetti che sottendono queste ultime;
- nei percorsi didattici con i bambini è necessario partire dall'attività concreta per poi passare alla rappresentazione grafica e quindi a quella simbolica.¹² In altre parole, è importante che i bambini acquisiscano, attraverso l'esercizio, competenze comportamentali che permetteranno loro, dopo un certo tempo evolutivo — che varia da individuo a individuo e per le diverse abilità —, di accedere alle rappresentazioni mentali delle medesime.¹³

Gli itinerari che abbiamo illustrato sono stati sperimentati nel lavoro riabilitativo con bambini — sordi e udenti, con problemi di linguaggio — fin dagli anni della scuola materna e in nessuno di questi soggetti si sono poi evidenziate, nella scuola elementare, problematiche legate all'ambito numerico e/o del problem solving. Lo stesso iter è stato seguito all'interno dell'intervento riabilitativo, in soggetti con deficit specifici nell'ambito degli apprendimenti matematici, con risultati significativi. Attualmente stiamo verificando la validità del nostro lavoro ai fini della prevenzione, con un gruppo di insegnanti di scuola materna ed elementare con riscontri molto incoraggianti.

Bibliografia

- ¹ Albanese O., Doudin P.A. e Martin D. (1995), *Metacognizione e educazione*, Milano, Franco Angeli.
- Albanese O., Migliorni P. e Pietrocola G. (1999), *Apprendimento e nuove strategie educative*, Milano, Unicopli.
- ² Dalla Vecchia R. et al. (1995), *Soluzione di problemi aritmetici con procedure di facilitazione*, «Difficoltà di Apprendimento», vol.1, n.1, pp. 85-92.
- Greeno J.G. (1978), *A study of problem solving*. In R. Glaser (a cura di), *Advances in instructional psychology. Vol. 1*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.
- Greeno J.G. (1983), *Conceptual entities*. In D. Gentner e A.L. Stevens (a cura di), *Mental models*, Hillsdale, NJ, Erlbaum.

- Katona G. (1940), *Organizing and memorizing*, New York, Columbia University Press.
- Lucangeli D. e Cornoldi C. (1995), *Metacognizione e matematica*. In O. Albanese, P.A. Douidin e D. Martin (a cura di), *Metacognizione ed educazione*, Milano, Franco Angeli.
- Lucangeli D. e Passolunghi M.C. (1995), *Psicologia dell'apprendimento matematico*, Torino, UTET.
- ³ Lucangeli D., Tressoldi P.E. e Cendron M. (1998), *SPM/Test delle abilità di soluzione dei problemi matematici*, Trento, Erickson.
- ⁴ Boscolo P. (1996), *Psicologia dell'apprendimento scolastico. Aspetti cognitivi*, Torino, UTET.
- Bruner J.S. (1971), *Prime fasi dello sviluppo cognitivo*, Roma, Armando.
- Cornoldi C. (1996), *Metacognizione e apprendimento*, Bologna, Il Mulino.
- ⁵ Riccardi Ripamonti I. (1998), *Educazione logico-matematica ed evoluzione della competenza linguistica*. In A. De Filippis, *Nuovo manuale di logopedia*, Trento, Erickson, pp. 354-369.
- ⁶ Borgogno E. (1992), *Dall'osservazione al progetto terapeutico*, Torino, Omega.
- Borgogno E. (1999), *Terapia psicomotoria e comunicazione*. In A. De Filippis, *Nuovo manuale di logopedia*, Trento, Erickson.
- ⁷ Furth H.G. (1980), *Piaget per gli insegnanti*, Firenze, Giunti e Barbera.
- Veggetti M.S. (1954), *La formazione dei concetti*, Firenze, Giunti e Barbera.
- ⁸ Le Boeuf C. (1976), *Raconte... Historiettes en images*, Paris, L'École.
- Riccardi Ripamonti I. (1983), *Causa effetto*, Milano, Ugo Mursia.
- Riccardi Ripamonti I. (1989), *Parole in libertà: Racconti*, Milano, Ugo Mursia.
- Riccardi Ripamonti I. (1991), *Storie scomposte*, Milano, Ugo Mursia.
- ⁹ Riccardi Ripamonti I. (s.d.), *E dopo ancora...*, Milano, Gruppo Ugo Mursia Editore.
- ¹⁰ Riccardi Ripamonti I. (1998), *op. cit.*
- ¹¹ Bortolato C. (1994), *Problemi per immagini*, Trento, Erickson.
- ¹² Bruner J.S. (1982), *Verso una teoria dell'istruzione*, Roma, Armando.
- ¹³ Karmiloff-Smith A. (1995), *Oltre la mente modulare*, Bologna, Il Mulino.